

Оренбургская областная олимпиада школьников 5-8 классов

6 класс МАТЕМАТИКА

Задача 6.1. Пять последовательных натуральных чисел написаны в ряд. Сумма трёх самых маленьких из них равна 60. Чему равна сумма трёх самых больших? □

Ответ: 66.

Решение. Пятое число на 4 больше первого, а четвёртое — на 2 больше второго. Тогда сумма трёх самых больших чисел на $2 + 4 = 6$ больше суммы трёх самых маленьких, и она равна $60 + 6 = 66$.

Задача 6.2. Аркадий, Борис, Вера, Галя, Даня и Егор встали в хоровод.

□

- Даня встал рядом с Верой, справа от неё,
- Галя встала напротив Егора,
- Егор встал рядом с Даней,
- Аркадий и Галя не захотели стоять рядом.

Кто стоит рядом с Борисом?

Ответ: Аркадий и Галя.

Решение. Из первого и третьего утверждения следует, что Вера, Даня, Егор стоят именно в таком порядке против часовой стрелке. Поскольку всего в хороводе шесть человек, то напротив Егора, то есть слева от Веры, стоит Галя. Остались Аркадий и Борис. Поскольку Аркадий и Галя не стоят рядом, то слева от Гали стоит Борис, а слева от Бориса — Аркадий. Получается такое расположение:

Борис

Галя Аркадий

Вера Егор

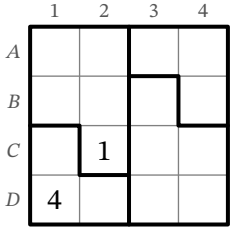
Даня

Рядом с Борисом — Аркадий и Галя. □

Задача 6.3. В клетках таблицы 4×4 расставлены числа 1, 2, 3, 4 так, что

- каждое из чисел встречается в каждой строке и в каждом столбце;
- во всех четырёх частях, изображённых на рисунке, суммы чисел равны.

По двум числам на рисунке определите, в каких клетках стоят двойки.



Постройте соответствие.

- В строчке A двойка стоит
- В строчке B двойка стоит
- В строчке C двойка стоит
- В строчке D двойка стоит

- в столбце с номером 1.
- в столбце с номером 2.
- в столбце с номером 3.
- в столбце с номером 4.

Ответ: В строчке A двойка стоит в столбце 2, в строчке B — 1, в строчке C — 4, в строчке D — 3.

Решение. Сначала найдём, чему равна сумма чисел в каждой из частей, на которые разделена доска. В каждом столбце по разу встречаются числа от 1 до 4. Их сумма равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, а во всей доске сумма всех чисел равна $10 \cdot 4 = 40$. Поскольку во всех частях суммы чисел равны, то они равны $40 : 4 = 10$.

Посмотрим на левый нижний уголок из трёх клеток. Одно из чисел — четвёрка, поэтому сумма двух других должна быть равна $10 - 4 = 6$. При этом эти два числа не могут быть четвёрками, так как четвёрка уже есть с ними в одной линии. Единственный возможный вариант — две тройки. Получаем, что в клетках $C1$ и $D2$ стоят тройки.

В правом верхнем трёхклеточном уголке сумма трёх чисел тоже равна 10. Такая сумма может быть получена либо как $4 + 3 + 3$, либо как $4 + 4 + 2$. При этом в первом случае в клетке $A4$ должна быть четвёрка, а во втором — двойка.

В клетках $C3$ и $C4$ в каком-то порядке стоят двойка и четвёрка, в клетках $D3$ и $D4$ — единица и двойка. Тогда в клетке $B3$ число равно $10 - 2 - 4 - 1 - 2 = 1$.

В клетках $A4$ и $B4$ записаны либо четвёрка и тройка, либо четвёрка и двойка. Четвёрка там в любом случае есть, поэтому в клетке $C4$ четвёрки быть не может, значит, в $C4$ двойка, а в $C3$ четвёрка.

В правом столбце двойка уже есть, значит, в клетке $D4$ единица, а в клетке $D3$ двойка.

Рассмотрим опять самый правый столбец. Там уже определились единица и двойка, значит, в оставшихся двух верхних клетках тройка и четвёрка, причём обязательно в клетке $A4$ четвёрка, а в клетке $B4$ тройка. Также мы сразу можем определить, что в клетке $A3$ тройка.

В верхней строке уже есть четвёрка. Во втором столбце не хватает двойки и четвёрки. Получается, что в клетке $A2$ двойка, а в клетке $B2$ четвёрка.

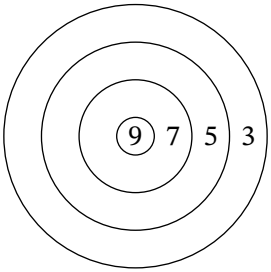
Оставшиеся пустые верхние клетки первого столбца заполняются без труда: в клетке $A1$ единица, а в клетке $B1$ двойка.

	1	2	3	4
A	1	2	3	4
B	2	4	1	3
C	3	1	4	2
D	4	3	2	1

Итак, двойки находятся в клетках $A2$, $B1$, $C4$, $D3$. □

Задача 6.4. Миша летом на даче изготовил себе самодельный дартс. Круглая доска разделена окружностями на несколько секторов — в неё можно кидать дротики. За попадание даётся столько очков, сколько написано в секторе, как указано на рисунке.

Миша кидал 3 раза по 8 дротиков. Во второй раз он выбил в 2 раза больше очков, чем в первый, а в третий раз в 1,5 раза больше, чем во второй. Сколько он выбил очков во второй раз?



Ответ: 48.

Решение. Наименьшая возможная сумма очков, которую можно выбить восемью дротиками, равна $3 \cdot 8 = 24$. Тогда во второй раз Миша выбил не меньше $24 \cdot 2 = 48$ очков, а в третий — не меньше $48 \cdot 1,5 = 72$.

С другой стороны, $72 = 9 \cdot 8$ — это наибольшая возможная сумма очков, которую можно выбить восемью дротиками. Значит, в третий раз Миша выбил ровно 72 очка, а во второй — ровно 48. □

Задача 6.5. Несколько одноклассников вместе съели торт. Лёша съел больше всех — $\frac{1}{11}$ от всего торта, а Алёна — меньше всех — $\frac{1}{14}$ от всего торта. Сколько одноклассников ели торт? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 12 или 13.

Решение. Если бы все в классе съели по $\frac{1}{11}$ торта, как Лёша, то человек в классе было бы 11. Но так как каждый, кроме Лёши, съел меньше $\frac{1}{11}$, то всего людей больше 11, то есть хотя бы 12.

Аналогичными соображениями покажем, что людей не больше 13. Если бы все в классе съели по $\frac{1}{14}$ торта, как Алёна, то человек в классе было бы 14. Но так как все, кроме Алёны, съели больше $\frac{1}{14}$, то всего людей меньше 14, то есть не больше 13.

Осталось два возможных варианта: 12 и 13. Покажем, что они оба возможны.

После того, как Лёша взял $\frac{1}{11}$ торта, а Алёна взяла $\frac{1}{14}$ торта, всё оставшееся мы раздадим поровну всем остальным (остальных — 10 или 11 человек). Поймём, почему каждому из них достанется менее $\frac{1}{11}$ торта, но более $\frac{1}{14}$ торта.

Предположим, что каждому из остальных досталось не менее $\frac{1}{11}$ торта. Кроме Алёны человек в классе не менее 11, каждый из них съел суммарно не менее $\frac{1}{11}$ торта. Тогда суммарно все, кроме Алёны, съели не менее $\frac{11}{11} = 1$, то есть целый торт. Но тогда Алёне бы ничего не досталось, противоречие. Значит, всем остальным досталось менее $\frac{1}{11}$ торта.

Предположим, что каждому из остальных досталось не более $\frac{1}{14}$ торта. Кроме Лёши человек в классе не более 12, каждый из них съел суммарно не более $\frac{1}{14}$ торта. Тогда суммарно все, кроме Лёши, съели не более $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ торта. Тогда оставшиеся не менее $\frac{1}{7}$ торта должен съесть Лёша, но он съел всего лишь $\frac{1}{11} < \frac{1}{7}$, противоречие. Значит, всем остальным досталось более $\frac{1}{14}$ торта. □

Задача 6.6. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 65 жителей острова собрались на заседание. Все они по очереди сделали заявление: «Среди сделанных ранее заявлений истинных ровно на 20 меньше, чем ложных». Сколько рыцарей было на этом заседании?

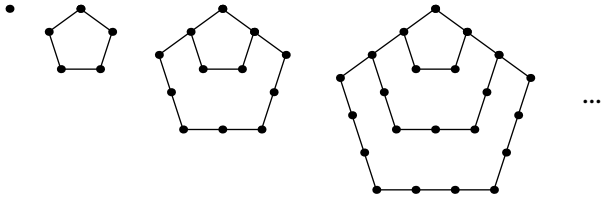
Ответ: 23.

Решение. Первые 20 человек — лжецы, потому что до них всего было сделано не больше 19 заявлений, а значит, истинных не может быть ровно на 20 меньше, чем ложных.

Далее 21-й человек говорит правду (ведь до него было ровно 20 ложных заявлений), значит, он рыцарь. Затем 22-й говорит неправду (до него было 20 ложных и 1 истинное заявление), значит, он лжец. Далее 23-й человек говорит правду (ложных заявлений опять стало на 20 больше, чем истинных), значит, 23-й рыцарь, и так далее.

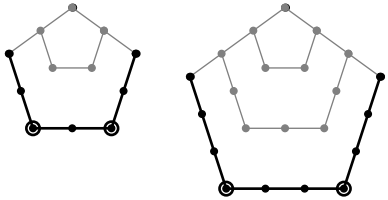
Среди людей, начиная с 21-го, те, кто с нечётными номерами, — рыцари, а те, кто с чётными, — лжецы. Среди чисел от 21 до 65 включительно ровно 23 нечётных, поэтому и рыцарей на заседании было ровно 23. □

Задача 6.7. Аня расставляет камешки на песке. Сначала она поставила один камень, потом добавила камешки, чтобы получился пятиугольник, затем сделала из камешков внешний большой пятиугольник, после этого ещё один внешний пятиугольник и т. д., как на рисунке. Количество камней, которые у неё были расставлены на первых четырёх картинках: 1, 5, 12 и 22. Если продолжать составлять такие картинки дальше, то сколько камней будет на 10-й картинке?



Ответ: 145.

Решение. На второй картинке 5 камней. Чтобы из неё получить третью картинку, нужно добавить три отрезка с тремя камнями на каждом. Угловые камни посчитаются два раза, поэтому всего камней на третьей картинке будет $5 + 3 \cdot 3 - 2 = 12$.

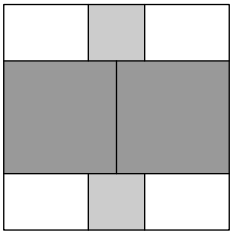


Чтобы из третьей картинки получить четвёртую, нужно добавить три отрезка с четырьмя камнями на каждом. Угловые камни посчитаются два раза, поэтому всего камней будет $12 + 3 \cdot 4 - 2 = 22$.

Аналогично посчитаем количество камней на каждой из остальных картинок:
на 5-й: $22 + 3 \cdot 5 - 2 = 35$;
на 6-й: $35 + 3 \cdot 6 - 2 = 51$;
на 7-й: $51 + 3 \cdot 7 - 2 = 70$;

на 8-й: $70 + 3 \cdot 8 - 2 = 92$;
на 9-й: $92 + 3 \cdot 9 - 2 = 117$;
на 10-й: $117 + 3 \cdot 10 - 2 = 145$. □

Задача 6.8. Крест, состоящий из двух одинаковых больших и двух одинаковых маленьких квадратов, поместили внутрь ещё большего квадрата. Вычислите в сантиметрах сторону самого большого квадрата, если площадь креста — 810 см^2.



Ответ: 36.

Решение. Длины стороны двух больших квадратов вместе дают сторону внешнего (самого большого) квадрата. Значит, стороны больших квадратов равны $\frac{1}{2}$ стороны внешнего квадрата, а площадь каждого из них равна $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ площади внешнего.

Длины сторон двух меньших квадратов вместе со стороной большего квадрата в сумме дают сторону внешнего квадрата. Значит, стороны меньших квадратов равны $\frac{1}{4}$ стороны внешнего квадрата, а площадь каждого из них равна $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ площади внешнего.

Общая площадь креста равна $2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{2}{16} = \frac{10}{16}$ площади внешнего квадрата и равна 810 см^2. Значит, $\frac{1}{16}$ площади внешнего квадрата равна $810 : 10 = 81$ см^2, а площадь всего внешнего квадрата равна $81 \cdot 16 = (9 \cdot 4)^2$ см^2. Тогда его сторона равна $9 \cdot 4 = 36$ см. □